Sessione straordinaria 2017

Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

L'azienda per cui lavori vuole aprire in città una pista di pattinaggio su ghiaccio e ti ha dato l'incarico di occuparti del progetto.

La pista verrà realizzata su un terreno di forma rettangolare, di base 40 metri e altezza 20 metri, e secondo le specifiche che ti sono state fornite sarà di forma ellittica[1] e avrà area pari a $600\ m^2$. Stabilito un sistema di assi cartesiani Oxy, il cui centro coincide con il centro dell'ellisse e con quello del rettangolo, in figura 1 sono rappresentati il terreno e la pista, in figura 2 la regione relativa al primo quadrante. La superficie in grigio è da adibire a deposito e a servizi tecnici, per cui deve essere inaccessibile al pubblico: essa è delimitata dalle tangenti alla pista passanti per i punti medi dei lati verticali AB e CD.

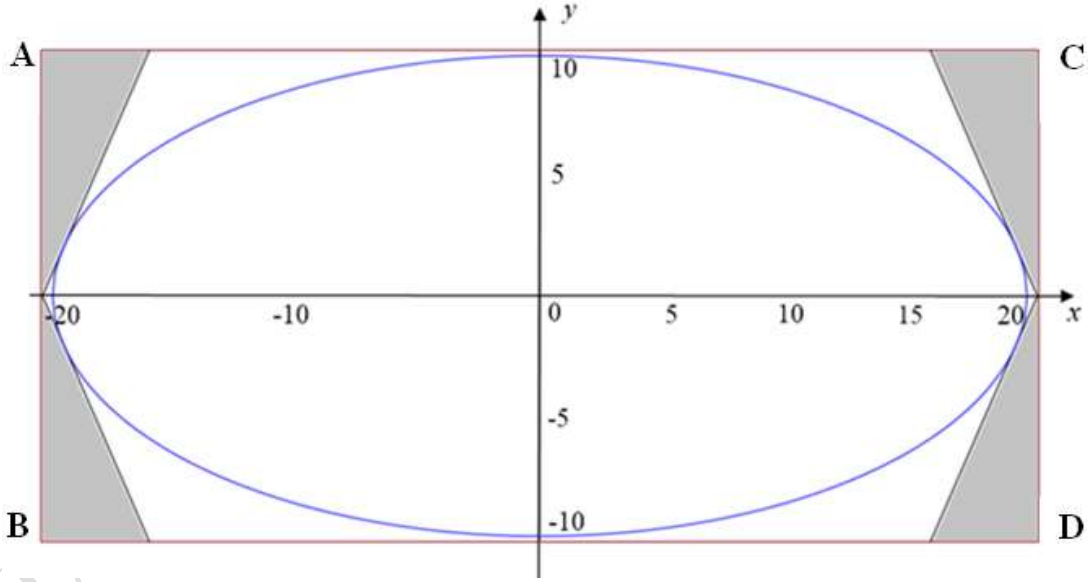

Figura 1

[1] L'equazione dell'ellisse, in coordinate cartesiane, è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Sessione straordinaria 2017
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

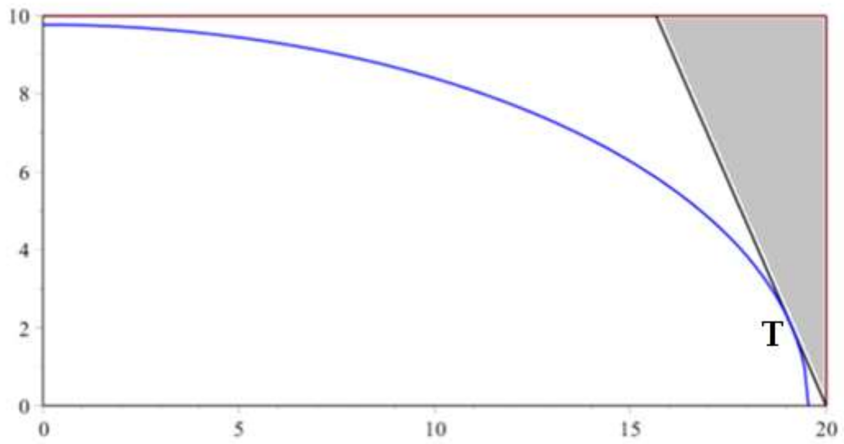

Figura 2

1. Determina, in funzione di a e b (rispettivamente lunghezza del semiasse orizzontale e del semiasse verticale dell'ellisse) le coordinate del punto di tangenza T, e verifica che l'espressione della superficie totale S dell'area evidenziata in grigio nella figura 2 è:

$$S = \frac{50\sqrt{400 - a^2}}{b}$$

2. Per motivi estetici, è richiesto che la proporzione tra il semiasse orizzontale e quello verticale dell'ellisse sia uguale a quella tra il lato orizzontale e quello verticale del rettangolo. Ricordando che l'area della pista[2] deve essere pari a $600\ m^2$, determina i valori di a e b (approssimati al centimetro). Verifica inoltre che la superficie evidenziata in grigio occupi meno del 15% del terreno disponibile.

Un'altra problematica da affrontare riguarda la scelta di un macchinario per la produzione del ghiaccio necessario per la pista, tenendo presenti la dimensione della pista, il tempo impiegato per tale produzione e il relativo consumo di energia. Tramite una ricerca di mercato, hai individuato un dispositivo che riesce a lavorare a una velocità che è inversamente proporzionale allo spessore raggiunto e in 3 ore di lavoro, a temperatura ambiente standard, produce una lastra di ghiaccio di superficie di $600\ m^2$ avente uno spessore di 3 cm.

3. Individua, per il macchinario selezionato, il modello matematico che descrive l'andamento dello spessore dello strato di ghiaccio in funzione del tempo.

Per un utilizzo ottimale la pista deve avere uno spessore compreso tra i 6,5 e gli 8 cm.

4. Determina il tempo che il macchinario impiega a realizzare uno strato di ghiaccio di spessore 7,5 cm.

[2] L'area della superficie racchiusa dall'ellisse di semiassi a e b è pari a πab.

PROBLEMA 2

Le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 sono definite nel modo seguente:

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$g_2(x) = |x| - 1$$

$$g_3(x) = -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$g_4(x) = \ln(|x|)$$

1. Verifica che nei punti $x = 1$ e $x = -1$ le funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 condividono le stesse rette tangenti.

2. Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni g_1, g_2, g_3, g_4 deduci quelli delle funzioni:

$$f_1(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & se\ |x| \geq 1 \\ -g_1(x), & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & se\ |x| \geq 1 \\ -g_2(x), & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} \ln(|x|), & se\ |x| \geq 1 \\ -g_3(x), & se\ |x| < 1 \end{cases}$$

   classifica gli eventuali punti di non derivabilità di f_1, f_2, f_3 e posto

$$I_1 = \int_{-e}^{e} f_1(x)dx$$

$$I_2 = \int_{-e}^{e} f_2(x)dx$$

$$I_3 = \int_{-e}^{e} f_3(x)dx$$

   verifica le disuguaglianze:

$$I_1 < I_3 < I_2$$

3. Posto

$$h(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \leq 0 \\ g_1(x), & se\ 0 < x < 1 \\ \ln(|x|), & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

dimostra che la funzione:

$$H(x) = \int_0^x h(t)dt$$

ammette uno zero nell'intervallo $\left[\sqrt{e}, e\right]$.

4. Calcola il volume del solido ottenuto facendo ruotare di $\pi/3$ radianti intorno all'asse x la regione di piano delimitata dalle rette di equazioni $x = -1$, $x = +1$ e dai grafici di g_2 e g_1.

QUESTIONARIO

1) Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \ln(x)$, adoperando la definizione di derivata.

2) Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 - 2x + 1 & per\ x < 2 \\ x^2 + (k-1)x - 1 & per\ x \geq 2 \end{cases}$$

Determinare, se possibile, k in modo che la funzione $f(x)$ e la sua derivata siano continue in tutto l'insieme di definizione.

3) Un solido ha per base la regione Π del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione $f(x) = x^2 + 2$ e l'asse delle x nell'intervallo $[0; 2]$. Per ogni punto P di Π, di ascissa x, l'intersezione del solido col piano passante per P e ortogonale all'asse delle x è un rettangolo di altezza $x + 1$. Calcolare il volume del solido.

4) Giovanni tira ripetutamente con l'arco a un bersaglio: la probabilità di colpirlo è del 28% per ciascun tiro. Se Giovanni esegue 10 tiri calcolare la probabilità che il bersaglio venga colpito: a) 4 volte; b) le prime 4 volte.

5) Stabilire per quale valore del parametro k il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 2x^2 + kx - 4$ ha una sola tangente parallela alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Quante tangenti orizzontali ha il grafico della funzione per questo valore del parametro k?

6) In un sistema di riferimento cartesiano il piano π di equazione $3x - 4y - 22 = 0$ è tangente a una sfera avente come centro il punto $C(3; 3; 0)$. Determinare il raggio della sfera.

7) Data la funzione:

$$f(x) = \ln(x) - [\ln(x)]^2$$

dimostrare che esistono due rette r e s tangenti al grafico della funzione in punti di ascissa $x > 1$, che passano entrambe per il punto $P(0; 1)$ e scrivere le rispettive equazioni.

8) Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto P di coordinate $(1; 1; 0)$ al piano di equazione $2x - 2y + z = 0$.

9) Sapendo che una moneta è truccata e che la probabilità che esca "testa" in un lancio è pari a p, determina i possibili valori che può assumere p, sapendo che la probabilità che esca testa esattamente 2 volte lanciando 4 volte la moneta è $^{8}/_{27}$.

10) Data la funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} \ln(t)\,dt$$

calcolare la sua derivata prima e di quest'ultima individuare gli eventuali punti stazionari.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.