Sessione suppletiva 2016
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03, EA09 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

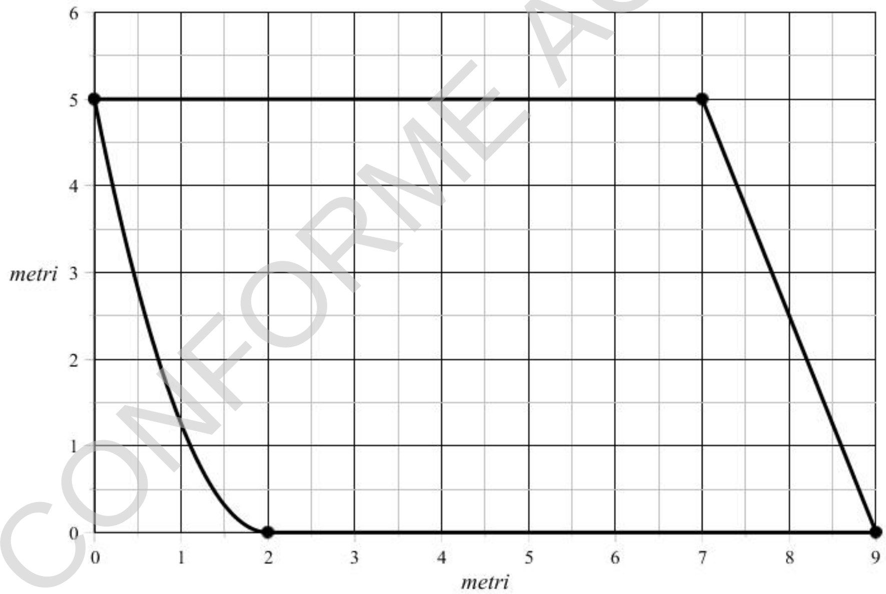
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sei l'amministratore di un condominio che ha deliberato di dotarsi di una sala per le riunioni condominiali, sfruttando uno spazio comune già disponibile, da coprire e attrezzare.

La superficie individuata è rappresentata in figura 1:



La superficie viene chiusa con pareti laterali alte 3,60 metri e con un tetto piano e orizzontale. Uno dei condomini ti fa presente la necessità di prevedere un impianto di aerazione nella sala, in quanto la mancanza di un adeguato ricambio d'aria in locali chiusi può provocare una serie di disturbi fisici, a causa dell'accumulo di CO_2 (anidride carbonica o diossido di carbonio). Di norma si considera come valore limite della concentrazione di CO_2 lo 0,15%: su 1 milione di particelle d'aria il massimo numero di molecole di CO_2 deve essere dunque 1500.

Nella scelta dell'impianto di aerazione un parametro fondamentale è la potenza in kilowatt, che dipende dal volume dell'ambiente in cui esso viene utilizzato.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

La seguente scheda tecnica, fornita dal produttore, fa riferimento alle comuni esigenze di utilizzo:

METRI CUBI DA AERARE	**POTENZA RICHIESTA (Kilowatt)**
41	2
68	2,6
108	3,5
135	4,4
162	5,3
216	6,1
270	7,2

1. In base ai dati disponibili e alla scheda tecnica, stima la potenza in kilowatt necessaria, giustificando la tua scelta.

In occasione di una riunione di condominio, un rilevatore di CO_2 installato nella sala indica una concentrazione dello 0,3%; i condomini chiedono quindi di accendere l'impianto di aerazione, in modo che all'ora di inizio della riunione la concentrazione sia stata ridotta allo 0,15%. Il sistema di aerazione immette nella sala 20 $\frac{m^3}{minuto}$ di aria fresca contenente lo 0,1% di CO_2.

2. Approssimando il volume della sala a 130 m^3, ricava l'equazione differenziale che descrive l'andamento della concentrazione $c(t)$ in funzione del tempo t (espresso in minuti). Verifica inoltre che la funzione $c(t) = k \cdot e^{-\frac{2}{13}t} + h$ è una soluzione di tale equazione differenziale.
3. Determina i valori da assegnare alle costanti k e h in modo che la funzione $c(t)$ rappresenti l'andamento della concentrazione di CO_2 a partire dall'istante $t = 0$ di accensione dell'aeratore. Stabilisci quindi quanto tempo prima dell'inizio della riunione esso deve essere acceso, per soddisfare la richiesta dei condomini.
4. L'impianto è in funzione da 10 minuti, quando i 50 partecipanti alla riunione accedono alla sala. Considerando che l'impianto rimane acceso anche durante la riunione e che un essere umano mediamente espira 8 litri/minuto di aria contenente il 4% di CO_2 (*fonte*: OSHA, *Occupational Safety and Health Administration*), descrivi in termini qualitativi come cambierà l'andamento di $c(t)$ dopo l'ingresso dei condomini nella sala, giustificando la tua risposta.

PROBLEMA 2

Fissato $k \in \Re$, la funzione $g_k : \Re \to \Re$ è così definita: $g_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$.

Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano O_{xy}.

1) Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \Re$, l'andamento della funzione g_k.

2) Determina per quali $k \in \Re$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k, passano tutte per il punto $T\left(0, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k.

3) Prova che esiste un unico rettangolo $\mathcal{R}_k$ di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. È possibile scegliere k in modo che tale rettangolo $\mathcal{R}_k$ sia un quadrato?

4) Posto

$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx,$$

determina il valore di

$$\lim_{t \to +\infty} G(t),$$

e interpreta il risultato in termini geometrici.

QUESTIONARIO

1. Si consideri questa equazione differenziale: $y'' + 2y' + 2y = x$. Quale delle seguenti funzioni ne è una soluzione? Si giustifichi la risposta.

   a) $y = e^{-x}(senx + cosx) + x$ b) $y = 2e^{-x} + x$

   c) $y = e^{-x}(senx + cosx) + \frac{1}{2}(x - 1)$ d) $y = e^{-2x} + x$

2. Data la funzione così definita in $\mathbb{R}$:

   $$f(x) = x \cdot e^{-|x^3 - 1|},$$

   determinarne minimi, massimi ed eventuali asintoti.

3. Determinare la velocità di variazione dello spigolo di un cubo, sapendo che il volume del cubo è pari a $0{,}1\ m^3$ e sta diminuendo alla velocità di $1200\ \frac{cm^3}{sec}$.

4. Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha $A_n = e - n\, A_{n-1}$.

5. I lati di un triangolo *ABC* misurano: $AB = 5\ cm$, $BC = 6\ cm$, $CA = 5\ cm$. Preso a caso un punto P all'interno del triangolo, qual è la probabilità che P sia più vicino al vertice B che al vertice A?

6. I punti $A(3,4,1)$, $B(6,3,2)$, $C(3,0,3)$, $D(0,1,2)$ sono vertici di un quadrilatero *ABCD*. Si dimostri che tale quadrilatero è un parallelogramma e si controlli se esso è un rettangolo.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

7. Determinare la distanza tra il punto $P(2, 1, 1)$ e la retta:

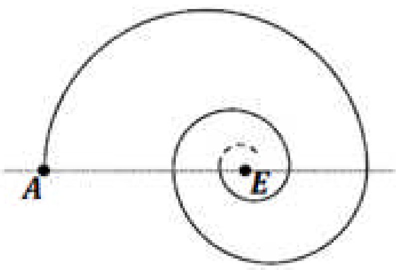
$$\begin{cases} x + y = z + 1 \\ z = -y + 1 \end{cases}$$

8. Supponiamo che l'intervallo di tempo *t* (in anni) tra due cadute di fulmini in un'area di 100 m^2 sia dato da una variabile casuale continua con funzione di ripartizione:

$$P(t \leq z) = \int_0^z 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01s} ds$$

   a) Si calcoli la probabilità che, in tale area, i prossimi due fulmini cadano entro non più di 200 anni l'uno dall'altro.
   b) Si determini qual è il minimo numero di anni *z*, tale che sia almeno del 95% la probabilità che i prossimi due fulmini cadano in tale area entro non più di *z* anni l'uno dall'altro.

9. Una curva "a spirale" inizia nel punto *A*, come indicato in figura, ed è formata congiungendo un numero infinito di semicirconferenze di diametri sempre più piccoli. Il diametro d_1 della prima semicirconferenza è di $80\ cm$. Il diametro d_2 della seconda è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_1. Il diametro d_3 della terza è pari ai $\frac{3}{5}$ di d_2, e così via: $d_{n+1} = \frac{3}{5} d_n$ per ogni *n*.



   Con lo sviluppo della curva, gli estremi delle varie semicirconferenze tendono al cosiddetto "occhio" *E* della spirale (ossia l'unico punto contenuto in tutti i vari diametri).

   Qual è la distanza (in linea retta) tra il punto *A* e il punto *E*?

   E qual è la lunghezza del cammino che va da *A* a *E*, percorrendo l'intera curva?

10. Si stabilisca il valore del limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 73 \cdot cos^3(4x + \frac{\pi}{11})}{5x - sen^2(x - \frac{\pi}{7})},$$

   motivando adeguatamente la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.