Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

I043 – ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

Indirizzi: LI02, EA02 – SCIENTIFICO
LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

(Testo valevole anche per la corrispondente sperimentazione quadriennale)

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A, B, C, come in figura 1.

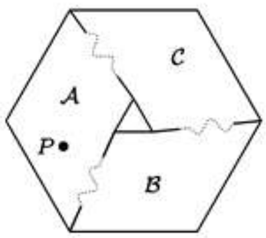

Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.

Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in A, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).

Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1) Dimostrare che

$$p_1(x) = (1-x)^2, \quad p_2(x) = 2x(1-x)^2, \quad p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$

e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0,1]$.

2) È vero che, qualunque sia $x \in [0,1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0,3 e almeno una deve essere minore di 0,4?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

3) Provare che esiste un unico $x_0 \in [0,1]$ tale che:

$$p_1(x_0) = p_3(x_0)$$

e stabilire se vale la disuguaglianza:

$$x_0 > {}^1\!/_2$$

Discutere inoltre, al variare di x in $[0,1]$, quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

4) Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$. Nel caso $x = {}^1\!/_2$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?

PROBLEMA 2

Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x)sen(2x).$$

1) Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.
2) Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.
3) Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k intero)? Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x? Motiva le tue risposte.
4) Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

e, posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|dx$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H?

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

QUESTIONARIO

1. Consideriamo la funzione $f(x) = e^{3-x}$. Preso un numero reale a, sia R_a la regione illimitata formata dai punti aventi ascissa $x > a$ che sono compresi tra il grafico di f e l'asse x. Per quale valore di a l'area di R_a risulta pari a 2?

2. Determinare l'equazione della retta perpendicolare nel punto $(1, 0, 3)$ al piano di equazione $3x + 2y - z = 0$.

3. Una variabile aleatoria, i cui valori appartengono all'intervallo $[0; 2]$, è distribuita secondo la densità di probabilità data da $p(x) = k \cdot x^2(2 - x)$, dove k è una costante opportuna. Si stabilisca il valore medio della variabile aleatoria considerata.

4. Rappresentare il grafico della funzione:

$$f(x) = \left|\frac{3 - 2x}{x - 3}\right|$$

   Verificare se negli intervalli $[0; 2]$ e $[4; 6]$ valgono le ipotesi del teorema di Lagrange, e in caso affermativo trovare i punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Esiste un intervallo $[a; b]$ in cui si possa applicare il teorema di Rolle? Giustificare la risposta.

5. Sia $f(x) = sen(x) + \cos(x)$. Determinare $f^{(2017)}(x)$, esplicitando, in modo chiaro ed esauriente, il procedimento seguito.

6. Determinare la distanza tra il punto $P(6, 6, 8)$ e la retta:

$$\begin{cases} x - y = 2z + 1 \\ z = y + 1 \end{cases}$$

7. Alberto e Barbara giocano lanciando un dado. Quando esce 1, 2, 3 o 4 Alberto fa 1 punto, quando esce 5 o 6 Barbara fa 2 punti. Vince chi arriva per primo a 6 punti. Qual è la probabilità che entrambi realizzino almeno 1 punto nel corso della partita? Qual è la probabilità che, in un certo momento della partita, il punteggio sia di 4 a 4?

8. Stabilire se le rette:

$$r: \quad y = 5x - 6$$
$$s: \quad y = 21x + 25$$

   sono tangenti alla curva δ di equazione:

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

9. Data la funzione:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad x \in \mathbb{R}$$

   determinare il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle y della porzione di piano delimitata dal grafico di $f(x)$ e dall'asse delle ascisse per $x \in [0; 3]$.

10. Trovare una funzione g, il cui insieme di definizione sia un qualsiasi intervallo contenente 0, tale che:

$$g(0) = 0 \quad g'(0) = 0 \quad g''(0) = 0 \quad g'''(0) = 1 \quad g^{(4)}(0) = 1 \quad g^{(5)}(0) = 1$$

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 257 Art. 18 comma 8).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.